

Показникові рівняння

Гладунова В.Г.

Означення

Рівняння, в якому змінна міститься в показнику степеня, називається **показниковим**.

Приклади: $2^x = 8$; $9^x - 5 \cdot 3^x + 6 = 0$

Найпростіше показникове рівняння – це рівняння виду

$$a^x = a^b, \text{ де } a > 0, a \neq 1.$$

Найпростіше показникове рівняння розв'язується за допомогою використання властивостей степеня.

$$a^x = a^b \Leftrightarrow x = b$$

Способи розв'язування складних показникових рівнянь.

Введення нової змінної

Ділення на показникову функцію

Винесення за дужки

Винесення за дужки степеня з меншим показником

Цей спосіб застосовується, якщо виконуються дві умови:

- 1) основи степенів однакові;
- 2) коефіцієнти перед змінною однакові

Наприклад: $2^{x+1} - 4 \cdot 2^{x-2} = 32$

Введення нової змінної

При даному способі показникове рівняння зводиться до квадратного.

Цей спосіб використовують, якщо

а) основи степенів однакові;

б) показник одного з степенів вдвічі більший, ніж інший

коефіцієнти перед змінною

протилежні.

Наприклад:

$$3^{2x} - 4 \cdot 3^x - 45 = 0$$

Наприклад:

$$2^{2-x} - 2^{x-1} = 1$$

Ділення на показникову функцію

Цей спосіб застосовується, якщо основи степенів різні.

а) в рівнянні виду $a^x = b^x$ ділимо на b^x

Наприклад: $2^x = 5^x \mid : 5^x$

б) в рівнянні $A a^{2x} + B (ab)^x + C b^{2x} = 0$ ділимо на b^{2x} .

Наприклад:

$$3 \cdot 25^x - 8 \cdot 15^x + 5 \cdot 9^x = 0 \mid : 9^x$$

Найпростіші показникові рівняння

$$1). 2^{3x+4} = 2^{x-7} \Leftrightarrow 3x+4 = x-7 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3x - x = -7 - 4 \Leftrightarrow 2x = -11 \Leftrightarrow x = -5,5.$$

Відповідь: - 5,5.

$$2). 5^{x^2-3x} = 1 \Leftrightarrow 5^{x^2-3x} = 5^0 \Leftrightarrow x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x(x-3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ x = 3. \end{cases}$$

Відповідь: 0; 3.

Винесення за дужки степеня з меншим показником

$$2^{x+1} - 4 \cdot 2^{x-2} = 32$$

$$2^{x-2} (2^3 - 4 \cdot 1) = 32$$

$$2^{x-2} (8 - 4) = 32$$

$$2^{x-2} \cdot 4 = 32 | :4$$

$$2^{x-2} = 8$$

$$2^{x-2} = 2^3$$

$$x - 2 = 3$$

$$x = 5$$

Відповідь: 5

$$x + 1 - (x - 2) =$$

$$= x + 1 - x + 2 = 3$$

Введення нової змінної(1)

$$3^{2x} - 4 \cdot 3^x - 45 = 0$$

$$t = 3^x \quad (t > 0)$$

$$t^2 - 4t - 45 = 0$$

За т. Вієта: $t_1 \cdot t_2 = -45$; $t_1 + t_2 = 4$

$t_1 = 9$; $t_2 = -5$ – не задовольняє умові

$$3^x = 9; \quad 3^x = 3^2; \quad x = 2.$$

Відповідь: 2

Введення нової змінної(2)

$$2^{2-x} - 2^{x-1} = 1$$

$$2^2 \cdot 2^{-x} - 2^x \cdot 2^{-1} = 1$$

$$t = 2^x \quad (t > 0)$$

$$\frac{4}{t} - \frac{t}{2} = 1$$

$$8 - t^2 = 2t$$

$$t^2 + 2t - 8 = 0$$

За т. Вієта:

$$t_1 \cdot t_2 = -8, \quad t_1 + t_2 = -2$$

$$t_1 = -4 \quad \text{- Не задовольняє умові}$$

$$t_2 = 2$$

$$2^x = 2$$

$$x = 1$$

Відповідь: 1

Ділення на показникову функцію

$$a) 2^x = 5^x \quad | : 5^x$$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^x = 1$$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^x = \left(\frac{2}{5}\right)^0$$

$$x = 0$$

Відповідь: 0

Ділення на показникову функцію

$$3 \cdot 25^x - 8 \cdot 15^x + 5 \cdot 9^x = 0 \quad | :9^x$$

$$\frac{3 \cdot 5^{2x}}{3^{2x}} - \frac{8 \cdot 5^x \cdot 3^x}{3^{2x}} + 5 = 0$$

$$3 \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^{2x} - 8 \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^x + 5 = 0$$

$$t = \left(\frac{5}{3}\right)^x \quad (t > 0)$$

$$3t^2 - 8t + 5 = 0$$

$$3t^2 - 8t + 5 = 0$$

$$D = 64 - 4 \cdot 3 \cdot 5 = 4 = 2^2$$

$$t_1 = \frac{8+2}{6} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}; \quad t_2 = \frac{8-2}{6} = 1.$$

$$\left(\frac{5}{3}\right)^x = \frac{5}{3}$$

$$x = 1$$

$$\left(\frac{5}{3}\right)^x = 1$$

$$\left(\frac{5}{3}\right)^x = \left(\frac{5}{3}\right)^0$$

$$x = 0$$

Відповідь: 0; 1.