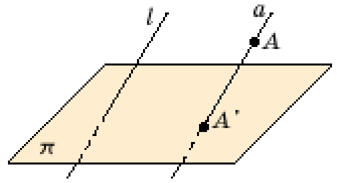
ПАРАЛЛЕЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ

Опр. Пусть π - некоторая плоскость, *l* - пересекающая ее прямая (рис. 1). Через произвольную точку *A*, не принадлежащую прямой *l*, проведем прямую, параллельную прямой *l*. Точка пересечения этой прямой с плоскостью π называется параллельной проекцией точки *A* на плоскость π в направлении прямой *l*. Обозначим ее *A*'.
Если точка *A* принадлежит прямой *l*, то параллельной проекцией *A* на плоскость π считается точка пересечения прямой *l* с плоскостью π.



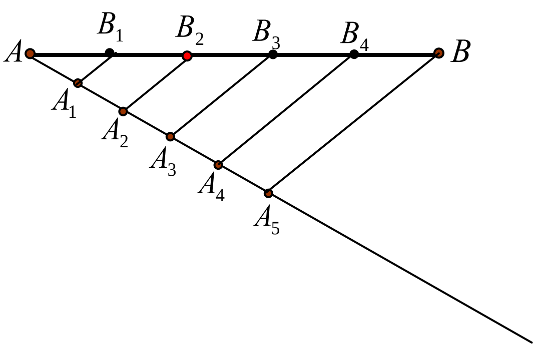
Таким образом, каждой точке *A* пространства сопоставляется ее проекция *A*' на плоскость π. Это соответствие называется ***параллельным проектированием*** на плоскость π в направлении прямой *l*.

Примеры параллельных проекций дают, например, тени предметов под воздействием пучка параллельных солнечных лучей.

Чтобы построить изображение какой либо фигуры, необходимо сначала изучить ее свойства, обратив внимание на те, которые не изменяются при параллельном проектировании:

1) ***параллельное проектирование сохраняет отношение длин отрезков, лежащих на прямой, не параллельной и не совпадающей с прямой l (в частности, при параллельном проектировании середина отрезка переходит в середину соответствующего отрезка);***
2) ***если две параллельные прямые не параллельны прямой l, то их проекции могут быть или параллельными прямыми или одной прямой.***

Также необходимо уметь делить отрезок в данном отношении.
Например, разделим отрезок AB точкой C в отношении 2:3, то есть точка C принадлежит отрезку AB и AC:BC=2:3.



Для этого проведем произвольный луч AC. На луче AC от точки A с помощью циркуля отложим пять равных отрезков(AC:BC=2:3, поэтому 2+3=5) $AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = A_4A_5$.

Соединим точки A_5 и B отрезком и через точки A_4, A_3, A_2, A_1 проведем параллельные прямые A_4B_4, A_3B_3, A_2B_2, A_1B_1.

Тогда по теореме Фалеса $AB_1=B_1B_2=B_2B_3=B_3B_4=B_4B$, то есть отрезок AB разделили на 5 равных частей.

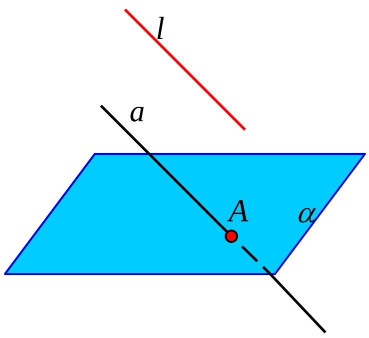
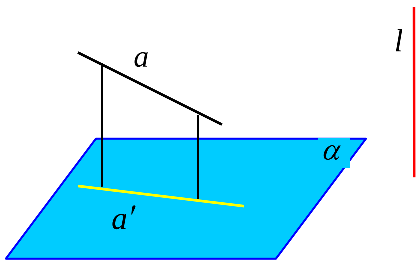
Тогда $AB_2:B_2B=2:3$.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

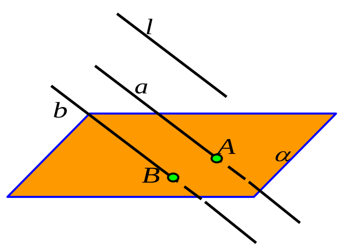
162. **Какие геометрические фигуры могут быть параллельными проекциями: 1) прямой; 2) двух параллельных прямых; 3) треугольника?**

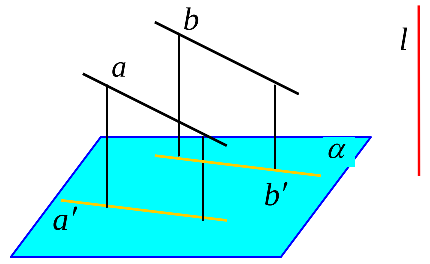
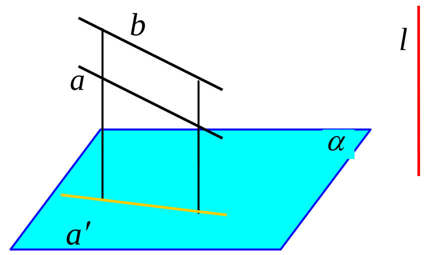
Решение

1)

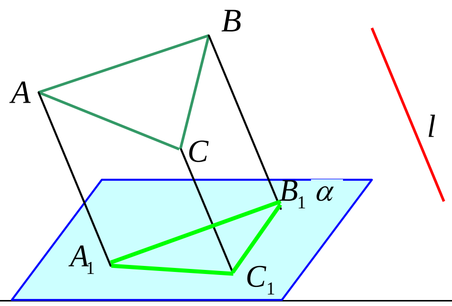
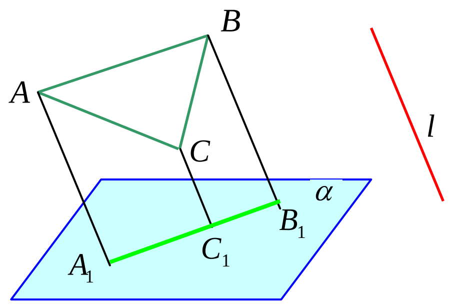
если прямая *параллельна* линии проектирования, то ее *проекция* – ***точка***	если прямая *не параллельна* линии проектирования (a не параллельна l), то ее *проекцией* является ***прямая***
α -плоскость, на которую проектируют, l - линия проектирования, a - прямая, которую проектируют, $a \parallel l$,  A - точка, проекция прямой a на плоскость α параллельно прямой l ;	α -плоскость, на которую проектируют, l - линия проектирования, a - прямая, которую проектируют, a и l не параллельны,  a' - проекция a на плоскость α параллельно прямой l ;

2)

если проектируют 2 ***параллельные прямые*** a и b , то их *проекциями* будут ***2 точки***, если эти прямые *параллельны линии проектирования* l	

<table>
<tr>
<td rowspan="2">если эти прямые не параллельны линии проектирования, то проекцией каждой из них будет прямая,
причем этими проекциями будут или параллельные прямые
или одна прямая(если проекции совпадут, это произойдет, если плоскость в которой лежат эти параллельные прямые и линия проектирования параллельны)</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>
</td>
</tr>
</table>

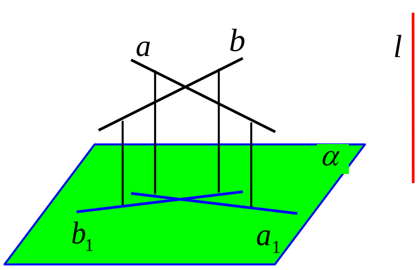
3)

<table>
<tr>
<td>проекцией треугольника является произвольный треугольник, если плоскость треугольника не параллельна линии проектирования</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>и отрезок, если плоскость треугольника параллельна линии проектирования.</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

163. Могут ли две пересекающиеся прямые проектироваться: 1) в две пересекающиеся прямые; 2) в параллельные прямые; 3) в одну прямую; 4) в прямую и точку на ней; 5) в прямую и точку вне ее?

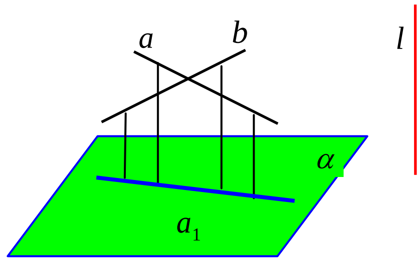
Решение

1) да, могут;

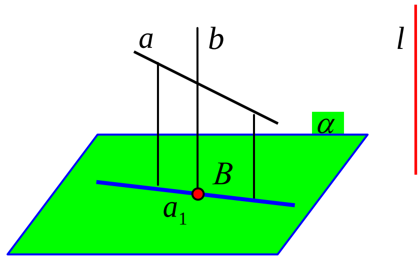


2) нет, параллельные прямые могут быть проекциями только параллельных прямых;

3) да, если плоскость в которой лежат эти пересекающиеся прямые и линия проектирования параллельны



4) да, когда одна из них параллельна линии проектирования,



a_1 проекция a, точка B проекция прямой b;

5) нет.

165. Можно ли при параллельном проектировании прямоугольника получить: 1) квадрат; 2) трапецию?

Решение

1) да, так противоположные стороны квадрата и прямоугольника параллельны и равны, а при параллельном проектировании сохраняется параллельность отрезков и отношение длин отрезков лежащих на одной или на параллельных прямых;
2) нет, так как тогда проекциями параллельных противоположных сторон AB и CD прямоугольника ABCD будут не параллельные боковые стороны A_1 B_1 и C_1D_1 трапеции $A_1B_1C_1D_1$.

172. Треугольник ABC является параллельной проекцией равностороннего треугольника (рис. 109). Постройте изображение высоты треугольника, проведенной из вершины B, и перпендикуляра, опущенного из точки F на сторону AC.

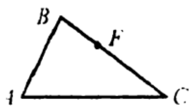
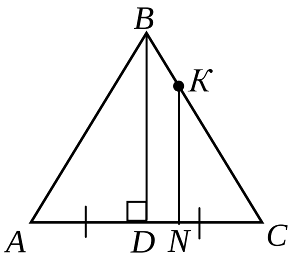
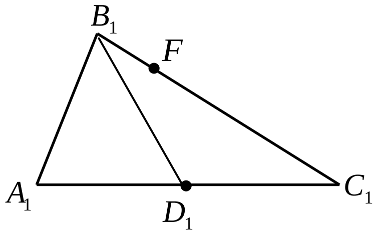


Рис. 109

Решение



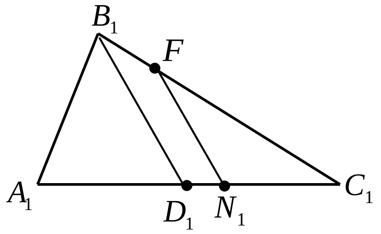
ΔABC - данный равносторонний треугольник, BD - высота, проведенная из вершины B. По свойству равностороннего треугольника BD не только высота, но и биссектриса и медиана, то есть $AD = CD$.



Пусть $\Delta A_1B_1C_1$ проекция ΔABC, тогда B_1D_1 проекция высоты BD, а точка D_1 - проекция точки D.

Так как при параллельном проектировании сохраняется отношение длин отрезков лежащих на одной прямой, то так как $AD = CD$, то и $A_1D_1 = C_1D_1$, значит D_1 середина A_1C_1.

Значит, проекцией высоты BD является медиана B_1D_1 треугольника $A_1B_1C_1$.



Пусть точка F проекция точки К, лежащей на стороне ВС данного равностороннего треугольника АВС.

Пусть $KN \perp AC$.

Так как $KN \perp AC$ и $BD \perp AC$, то $KN \| BD$.

Так как при параллельном проектировании сохраняется параллельность отрезков, то проекцией отрезка KN параллельного BD будет отрезок FN_1 параллельный B_1D_1. Значит, проведем через точку F отрезок FN_1 параллельный B_1D_1.

173. Треугольник $A_1B_1C_1$ (рис. 110) — изображение прямоугольного треугольника ABC, у которого $\angle C = 90°$, $AC : CB = 3 : 4$. Постройте изображение центра вписанной окружности треугольника ABC.

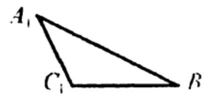
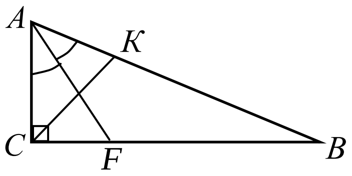


Рис. 110

Решение

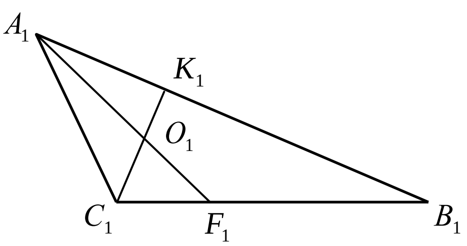


Пусть ΔACB - данный прямоугольный треугольник, $\angle C = 90^0$, $AC : BC = 3 : 4$.

Центр вписанной в треугольник окружности – точка О, точка пересечения биссектрис СК и AF треугольника.

Но построить биссектрисы мы не сможем, так как углы не сохраняются при проектировании. Поэтому воспользуемся свойством биссектрисы треугольника не только делить угол пополам, но и делить противолежащую сторону треугольника на отрезки пропорциональные прилежащим сторонам, а ведь при параллельном проектировании сохраняется отношение длин отрезков лежащих на одной прямой.

Пусть СК – биссектриса угла С. Тогда $AC : BC = AK : BK$. Но по условию $AC : BC = 3 : 4$, значит $AK : BK = 3 : 4$.



Пусть $\Delta A_1C_1B_1$ проекция ΔACB. Пусть точка K_1 – проекция точки К. Так как $AK : BK = 3 : 4$, то и $A_1K_1 : B_1K_1 = 3 : 4$.

Поэтому разделим отрезок A_1B_1 на 7 равных частей(3+4=7), и поставим точку K_1 так, чтобы на A_1K_1 приходилось 3 части, а на B_1K_1 приходилось 4 части. Тогда

$A_1K_1 : B_1K_1 = 3:4$.

Чтобы построить изображение еще одной биссектрисы, например BF, надо знать в каком отношении она делит сторону AC.

Пусть $AC = 3x$, тогда $BC = 4x$, так как по условию $AC : BC = 3:4$. По теореме Пифагора

$AB^2 = AC^2 + BC^2$,

$AB^2 = (3x)^2 + (4x)^2$,

$AB^2 = 25x^2$,

$AB = 5x$, так как $AB > 0$.

По свойству биссектрисы CF:BF=AC:AB, значит CF:BF=3x:5x, то есть CF:BF=3:5.

Тогда и $C_1F_1:B_1F_1=3:5$.

Поэтому разделим отрезок C_1B_1 на 8 равных частей(3+5=8), и поставим точку F_1 так, чтобы на C_1F_1 приходилось 3 части, а на B_1F_1приходилось 5 частей. Тогда $C_1F_1:B_1F_1=3:5$.

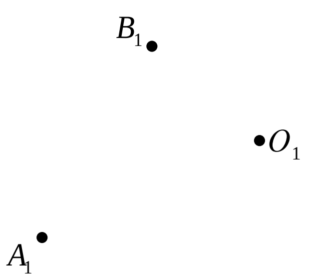
Точка пересечения C_1K_1 и A_1F_1 –это и есть изображение центра окружности вписанной в данный прямоугольный треугольник.

174. Точки A_1, B_1, O_1, не лежащие на одной прямой, являются параллельными проекциями двух вершин и точки пересечения диагоналей параллелограмма. Постройте изображение параллелограмма. Сколько решений имеет задача?

Решение

Так как при параллельном проектировании отрезки параллельных прямых изображаются отрезками параллельных прямых или отрезками одной прямой, то параллельной проекцией параллелограмма является параллелограмм или отрезок.

Поскольку по условию проекции дву вершин паралллнлограмма и точки пересечения его диагоналей не лежат на одной прямой то проекция данного параллелограмма не может быть отрезком.



Пусть точки A_1, B_1, O_1 – параллельные проекции двух вершин A и B и точки пересечения диагоналей O параллелограмма ABCD

По свойству диагоналей параллелограмма AO=CO и BO=DO..

Так как при параллельном проектировании сохраняется отношение длин отрезков лежащих на одной прямой, то и $A_1O_1=C_1O_1$ и $B_1O_1=D_1O_1$.

Поэтому проведем отрезок A_1O_1, продлим его за точку O_1, получим отрезок O_1C_1, причем $A_1O_1= O_1C_1$, проведем отрезок B_1O_1, и его продлим за точку O_1, получим отрезок O_1D_1, причем $B_1O_1 = O_1D_1$.

Тогда $A_1B_1C_1D_1$ параллелограмм (его диагонали пересекаясь делятся пополам, значит он параллелограмм), значит $A_1B_1C_1D_1$ искомая проекция.