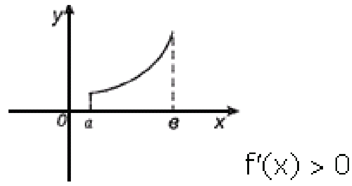
# Применение производной для исследования функций

# и построения их графиков

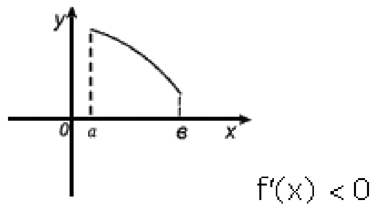
## *1. Достаточные признаки монотонности функции.*

**Достаточное условие возрастания функции**




*Если $f'(x) > 0$ в каждой точке интервала ( a, b ), то функция $f(x)$ возрастает на этом интервале.*

**Достаточное условие убывания функции**




*Если $f'(x) < 0$ в каждой точке интервала ( a, b ) , то функция $f(x)$ убывает на этом интервале.*

## *2. Критические точки.*

*<u>Внутренние</u> точки области определения функции, в которых производная равна нулю или не существует, называются* ***критическими точками*** *этой функции.*

Эти точки очень важны при анализе функции и построении её графика, потому что только в этих точках функция может иметь *экстремум ( минимум* или *максимум)* , рис.5*а*,*б*).

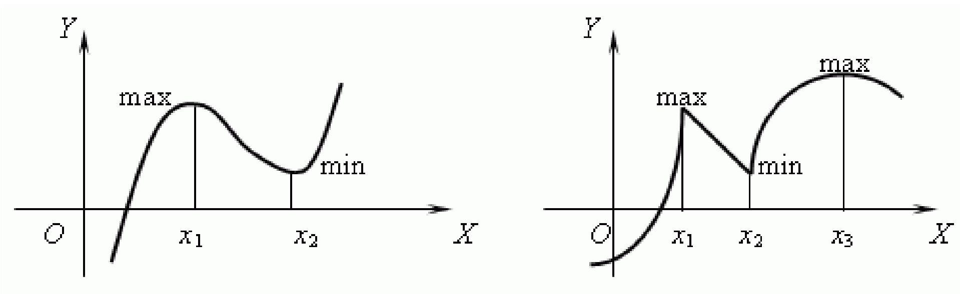



Рис. 5*а* Рис. 5*б*

В точках $x_1$ , $x_2$ ( рис.5*a* ) и $x_3$ ( рис.5*b* ) производная равна 0; в точках $x_1$ , $x_2$ ( рис.5*б* ) производная не существует. Но все они точки экстремума.

## 3. Необходимое условие экстремума.

*Если $x_0$ - точка экстремума функции $f(x)$ и производная $f'$ существует в этой точке, то $f'(x_0)=0$.*

Эта теорема - *необходимое* условие экстремума. Если производная функции в некоторой точке равна 0, то это не значит, что функция имеет экстремум в этой точке. Например, производная функции $f(x)=x^3$ равна 0 при $x=0$, но эта функция не имеет экстремум в этой точке ( рис.6 ).

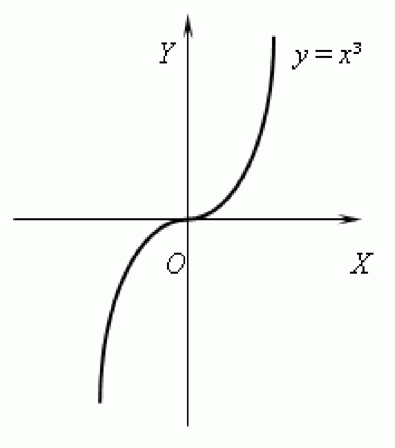



Рис. 6

С другой стороны, функция $y=|x|$, представленная на рис.3, имеет минимум в точке $x=0$ , но в этой точке производной не существует.

## 4. Достаточные условия экстремума.

*Если производная при переходе через точку $x_0$ меняет свой знак с плюса на минус, то $x_0$ - точка максимума.*

*Если производная при переходе через точку $x_0$ меняет свой знак с минуса на плюс, то $x_0$ - точка минимума.*

## 5. План исследования функции.

Для построения графика функции нужно:

1) найти область определения и область значений функции,

2) установить, является ли функция чётной или нечётной,

3) определить, является ли функция периодической или нет,

4) найти нули функции и её значения при $x = 0$,

5) найти интервалы знакопостоянства,

6) найти производную и ее область определения;

7) найти критические точки;

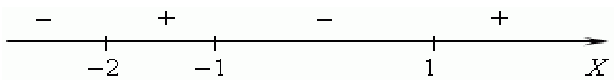
8) найти интервалы монотонности, найти точки экстремума и значения функции в этих точках,

9)проанализировать поведение функции вблизи "особых" точек

и при больших значениях модуля $x$(то есть на концах области определения) .

***Пример.*** Исследуйте функцию $f(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$ и постройте график.

*Решение*. Исследуем функцию по вышеприведенной схеме.

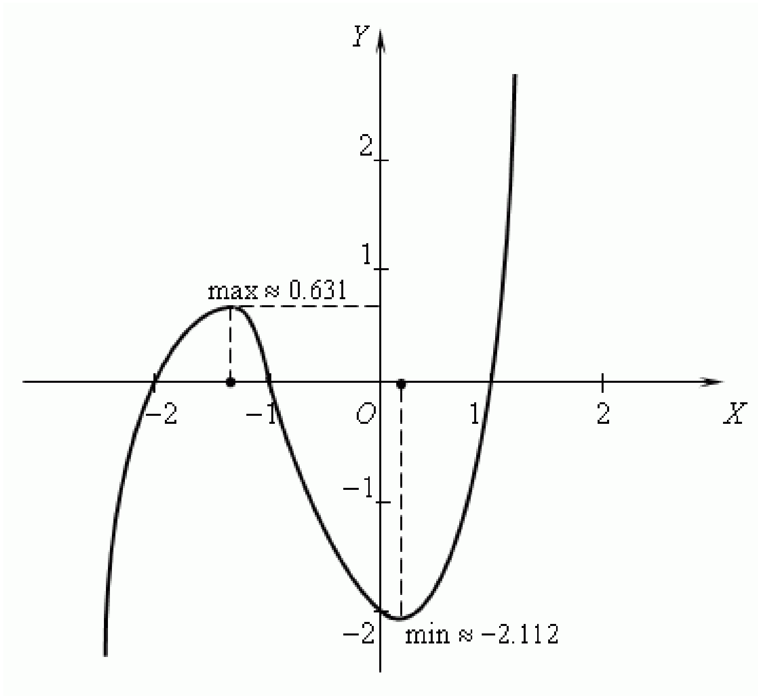
| | | |
|---|---|---|
| 1) | область определения | $x \in \boldsymbol{R}$ |
| | область значений | $y \in \boldsymbol{R}$ |
| 2) | функция $f(x)$ не является ни чётной, ни нечётной, так как | $f(-x) = (-x)^3 + 2(-x)^2 - (-x) - 2$ ,<br>$f(-x) = -x^3 + 2x^2 + x - 2 \neq f(x)$ ,<br>$f(-x) = -x^3 + 2x^2 + x - 2 = -(x^3 - 2x^2 - x + 2) \neq -f(x)$ |
| 3) | непериодическая функция; | |
| 4) | график функции пересекается с осью $Oy$ | в точке (0, – 2), так как<br>$f(0) = 0^3 + 2 \cdot 0^2 - 0 - 2 = -2$ , |
| | нули функции | $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$,<br>$x_1 = -2, x_2 = -1, x_3 = 2$ |
| 5) | интервалы знакопостоянства |  |

| | | |
|---|---|---|
| 6) | производная | $f'(x) = 3x^2 + 4x - 1,\ x \in \boldsymbol{R}$ |
| 7) | критические точки, в которых производная не существует | не имеет точек, в которых она не существует |
| | критические точки, в которых производная равна нулю | $3x^2 + 4x - 1 = 0$, $x_1 = \frac{-2-\sqrt{7}}{3}$ , $x_2 = \frac{-2+\sqrt{7}}{3}$ |
| 8) | интервалы монотонности, точки экстремума и значения функции в этих точках, | смотри таблицу ниже |
| 90 | поведение на концах области определения | $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^3 + 2x^2 - x - 2\right) = +\infty$ , $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^3 + 2x^2 - x - 2\right) = -\infty$ |

Полученные результаты сведены в таблицу:

| $x$ | $\left(-\infty, \frac{-2-\sqrt{7}}{3}\right)$ | $\frac{-2-\sqrt{7}}{3}$ | $\left(\frac{-2-\sqrt{7}}{3}, \frac{-2+\sqrt{7}}{3}\right)$ | $\frac{-2+\sqrt{7}}{3}$ | $\left(\frac{-2+\sqrt{7}}{3}, +\infty\right)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | 0 | – | 0 | + |
| $f(x)$ | ↗ | ~0.631 | ↘ | ~ −2.112 | ↗ |
| | | max | | min | |

Здесь стрелками обозначены выводы о возрастании ↗ или убывании ↘ функции внутри соответствующих интервалов. Теперь у нас есть полная информация для построения графика функции (рис.7).




# Применение производной для нахождения наибольшего и наименьшего значений функции на промежутке

***Схема нахождения наибольшего и наименьшего значений функции f(x), непрерывной на отрезке [a; b].***

1. Найти производную.
2. Найти критические точки.
3. Найти значения функции в концах отрезка, т.е. $f(a)$ и $f(b)$.
4. Найти значения функции в тех критических точках, которые принадлежат интервалу $(a,b)$.
5. Из найденных значений выбрать наибольшее и наименьшее.

***Пример***

Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)=2x^3-12x^2+18x+3$

на отрезке $[-1; 2]$

**Решение**:

1. $f'(x) = (2x^3 - 12x^2 + 18x + 3)' = 6x^2 - 24x + 18$ , $x \in R$ .

2. Критических точек, в которых производная не существует, у этой функции нет, так как она существует при $x \in R$ ,

Найдем критические точки, в которых производная равна нулю:

$6x^2 - 24x + 18 = 0$ , $x^2 - 4x + 3 = 0$ , $x_1 = 1, x_2 = 3$ - критические точки.

Первая критическая точка принадлежит данному отрезку, а вот вторая – нет, поэтому про неё сразу забываем.

3. Вычислим значения функции на концах отрезка:

$$f(-1) = 2\cdot(-1)^3 - 12\cdot(-1)^2 + 18\cdot(-1) + 3 = -2 - 12 - 18 + 3 = \mathbf{-29}$$
$$f(2) = 2\cdot 2^3 - 12\cdot 2^2 + 18\cdot 2 + 3 = 16 - 48 + 36 + 3 = \mathbf{7}$$

4. Вычислим значение функции в нужной точке:

$$f(x_1) = f(1) = 2\cdot 1^3 - 12\cdot 1^2 + 18\cdot 1 + 3 = 2 - 12 + 18 + 3 = \mathbf{11}$$

3) Дело сделано, среди «жирных» чисел выбираем наибольшее и наименьшее.

**Ответ**:

**Дополнительные рекомендованные ссылки на ресурсы сети Интернет**

https://www.youtube.com/watch?v=6cdwhXy1a7Y

https://www.youtube.com/watch?v=o45_AUuXaoQ

https://www.youtube.com/watch?v=ixHUfqhwjnQ

**Домашнее задание**

Ш.А.Алимов, Ю.М.Колягин, М.В. Ткачева, Н.Е.Федорова

«АЛГЕБРА И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА» 10-11 класс, Москва «Просвещение», 2016.

Проработать §51,52.

Решить № 923,924, 926(1), 027(1),937