1. Основание для введения нового понятия, логарифм в частном случае

Логарифм для нас – новое понятие. Полезно вспомнить ситуации, когда мы вводили новые понятия, то есть когда без них уже невозможно обойтись. Для этого решим несколько примеров.

Пример 1

Решить уравнение $2^x = 16$.

Способ 1 (аналитический)

$2^x = 2^4, x = 4$

В данном способе мы уравняли основания степеней и приравняли полученные показатели.

Способ 2 (графический)

Разбиваем заданное уравнение на две функции

$\begin{cases} y = 2^x \\ y = 16 \end{cases};$

и выполняем построение в одной системе координат.

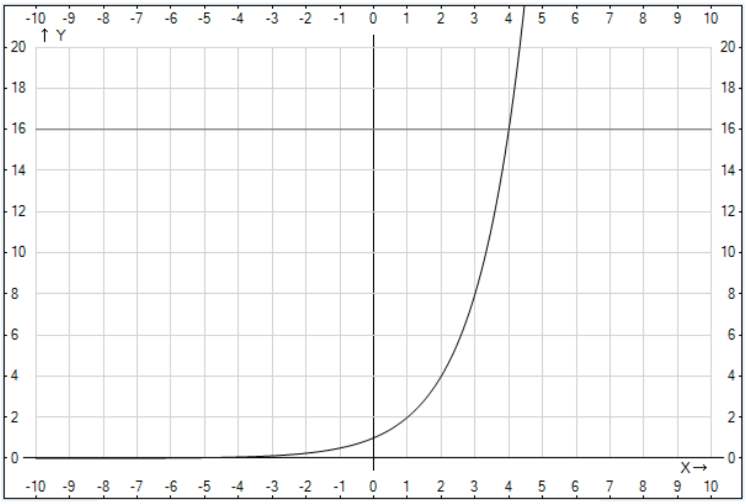

Рис. 1. График к примеру 1

График первой функции – экспонента, второй – прямая $y = 16$.

Имеем единственную точку пересечения графиков – единственный корень уравнения, который легко угадывается и проверяется подстановкой в заданное уравнение.

Ответ: $x = 4$.

До сих пор для решения уравнений нам не требовалось никаких новых терминов.

Пример 2

Решить уравнение $2^x = 11$.

Пытаемся решить первым способом $2^x = 2^?$. Не можем найти подходящую степень числа 2, не можем уравнять показатели.

Возможно, уравнение не имеет решения. Построим графики

$\begin{cases} y = 2^x \\ y = 11 \end{cases}$;

Очевидно, что решение есть, т. к. графики пересекаются, но угадать или подобрать корень невозможно.

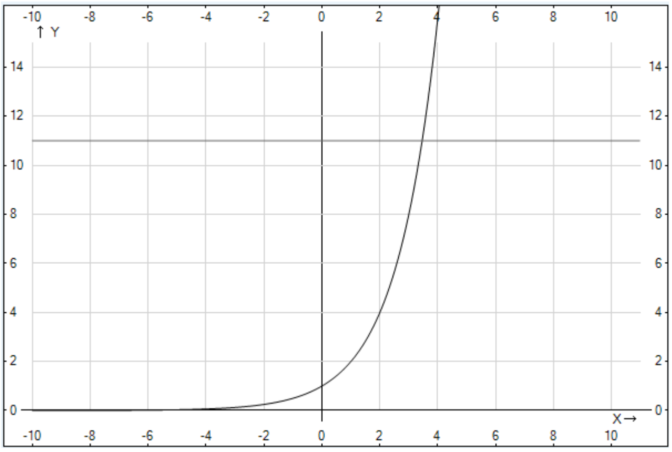

Рис. 3. График к примеру 3

Экспонента $y = 2^x$ пересекает прямую $y = 11$ в единственной точке, этой точке соответствует конкретное значение аргумента, которое назвали логарифмом числа 11 по основанию 2 -

$x = \log_2 11$

Итак, логарифм – это такой показатель степени, в который нужно возвести ее основание, чтобы получить заданное число, т. е. логарифм одиннадцати по основанию два – это такой показатель степени, в который нужно возвести основание два, чтобы получить одиннадцать.

Теперь рассмотрим общий случай и дадим строгое определение.

Рассмотрим уравнение $a^x = b,\ a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0,\ x \in R$.

При выполнении поставленных условий уравнение имеет единственное решение $x = \log_a b$.

2. Строгое определение логарифма, основное логарифмическое тождество, элементарные примеры

Определение: ***Логарифмом числа b по основанию a называется такой показатель степени, в которую нужно возвести основание a, чтобы получить число b.***	$\log_a b = x \Rightarrow a^x = b$ $a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0$

Основное логарифмическое тождество	$a^{\log_a b} = b$

Например:

$2^x = 16 \leftrightarrow x = \log_2 16 = 4;\ 2^x = 8 \leftrightarrow x = \log_2 8 = 3; 2^{\log_2 7} = 7$

Десятичный логарифм – логарифм по основанию 10.	$\log_{10} a = \lg a$

3. Основное правило для решения простейших задач, примеры

Отметим важное правило:

Чтобы получить число b, стоящее под знаком логарифма, необходимо возвести основание a в степень x:

$x = \log_a b \leftrightarrow b = a^x$

4. Решение типовых задач с логарифмами

Пример 3 – вычислить:

а) $\log_3 81$;

б) $\log_{81} 3$.

Решение

Обозначим искомые логарифмы через *x* и *y* и используем определение

а) $\log_3 81 = x$,

$81 = 3^x$.

Получили показательное уравнение. Уравняем основания и получим ответ:

$3^x = 3^4, x = 4$

б) $\log_{81} 3 = y$,

$3 = 81^y$

Получили показательное уравнение. Уравняем основания и получим ответ:

$3^1 = (3^4)^y, 4y = 1, y = \frac{1}{4}$

Пример 4 – проверить равенства с логарифмами:

а) $\log_5 0{,}04 = -2$,

$0{,}04 = 5^{-2}, \frac{1}{(5)^2} = 0{,}04; \frac{1}{25} = 0{,}04; \frac{1}{25} = \frac{4}{100}; \frac{1}{25} = \frac{1}{25}$

Равенство верно.

б) $\log_{\sqrt{2}} 8 = 6$,

$8 = \sqrt{2}^6, 8 = (2^{\frac{1}{2}})^6; 8 = 2^3; 8 = 8$

Равенство верно.

Рассмотрим простейшие уравнения.

Пример 5 – решить уравнение

а) $\log_3(x-1) = 4$,

$x - 1 = 3^4 > 0, x - 1 = 81; x = 82$

Обратим внимание, что ***под логарифмом должно стоять строго положительное число:***

ОДЗ $x - 1 > 0, x > 1$.

Найденное решение удовлетворяет ОДЗ, т. к. $82 > 1$.

б) $\log_7 x = -1$,

$x = (7)^{-1}, x = \frac{1}{7}$

ОДЗ $x > 0$ соблюдено

в) $\log_x 8 = 3$,

$8 = (x)^3, x = \sqrt[3]{8}, x = 2$

Основание логарифма должно быть больше нуля и не равным единице:

ОДЗ $x > 0, x \neq 1$.

Найденный корень удовлетворяет условию

г) $\log_x 5 = \frac{1}{2}$,

$5 = x^{\frac{1}{2}}, x = 5^2, x = 25$.

ОДЗ $x > 0, x \neq 1$.

Найденный корень удовлетворяет условию

Большую роль в вычислительных задачах с логарифмами имеет основное логарифмическое тождество.

$a^{\log_a b} = b$

Пример 6 – вычислить:

а) $5^{\log_5 8} = 8$;

б) $2^{3+\log_2 7}$,

воспользуемся свойством степени: *если в показателе степени стоит сумма, степень можно представить как произведение степеней с одинаковым основанием*:

$$2^{3+\log_2 7} = 2^3 * 2^{\log_2 7} = 8 * 7 = 56$$

5.Логарифм произведения, формула, примеры

Теорема 1:

Логарифм произведения двух положительных чисел равен сумме логарифмов этих чисел.	$\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$ $b > 0, c > 0, a > 0, a \neq 1$

Пример 7 – вычислить:

а) $\log_6 12 + \log_6 3$.

Несложно догадаться, что сумму логарифмов с одинаковым основанием можно представить как логарифм произведения:

$$\log_6 12 + \log_6 3 = \log_6 3 * 12 = \log_6 36 = \log_6 6^2 = 2$$

б) $\lg 25 + \lg 4$,

аналогично предыдущему примеру представляем сумму десятичных логарифмов как логарифм произведения:

$$\lg 25 + \lg 4 = \lg 25 * 4 = \lg 100 = \lg 10^2 = 2$$

4. Логарифм частного, формула, примеры

Теорема 2:

Логарифм частного двух положительных чисел равен разности логарифмов этих чисел.	$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$ $b > 0, c > 0, a > 0, a \neq 1$

Пример 8 – вычислить:

а) $\log_3 7 - \log_3 \frac{7}{9}$.

Согласно выведенной формуле, разность логарифмов с одинаковым основанием можем представить как логарифм частного:

$$\log_3 7 - \log_3 \frac{7}{9} = \log_3 \frac{7}{\frac{7}{9}} = \log_3 \frac{7 * 9}{7} = \log_3 9 = \log_3 3^2 = 2$$

б) $\log_2 15 - \log_2 30$.

Аналогично предыдущему примеру:

$$\log_2 15 - \log_2 30 = \log_2 \frac{15}{30} = \log_2 \frac{1}{2} = \log_2 2^{-1} = -1$$

5. Логарифм степени, формула

Теорема 3:

Логарифм степени равен произведению показателя степени и логарифма основания этой степени.	$\log_a b^r = r \log_a b$

Другими словами, в данном случае показатель степени выносится как сомножитель, сложная операция возведения в степень заменяется более простой операцией умножения.

6. Решение некоторых типовых задач

Рассмотрим задачи на применение выведенной формулы.

Пример 9 – прологарифмировать по основанию 3 выражение:

$$9a^7\sqrt[6]{b} \ (a, b > 0)$$

$$\log_3(9a^7\sqrt[6]{b})$$

Имеем логарифм произведения трех положительных выражений, распишем по известной формуле:

$$\log_3(9a^7\sqrt[6]{b}) = \log_3 9 + \log_3 a^7 + \log_3 \sqrt[6]{b}$$

Преобразуем подлогарифмические выражения:

$$\log_3 9 + \log_3 a^7 + \log_3 \sqrt[6]{b} = \log_3 3^2 + \log_3 a^7 + \log_3 b^{\frac{1}{6}}$$

Согласно свойству логарифма вынесем показатели степеней как сомножители:

$$\log_3 3^2 + \log_3 a^7 + \log_3 b^{\frac{1}{6}} = 2\log_3 3 + 7\log_3 a + \frac{1}{6}\log_3 b = 2 + 7\log_3 a + \frac{1}{6}\log_3 b$$

Пример 10 – решить уравнение:

$$\log_6 x = 3\log_6 2 + 0{,}5\log_6 25 - 2\log_6 3$$

Внесем множители под знак логарифма как показатели степени согласно свойству логарифма:

$$\log_6 x = \log_6 2^3 + \log_6 25^{\frac{1}{2}} - \log_6 3^2$$

Заменим сумму логарифмов логарифмом произведения:

$$\log_6 x = \log_6 2^3 * 25^{\frac{1}{2}} - \log_6 3^2$$

Заменим разность логарифмов логарифмом частного:

$$\log_6 x = \log_6 \frac{2^3 * 25^{\frac{1}{2}}}{3^2}$$

Упростим правую часть:

$$\log_6 x = \log_6 \frac{8 * 5}{9}$$

$$\log_6 x = \log_6 \frac{40}{9}$$

Из определения логарифма:

$$x = 6^{\log_6 \frac{40}{9}}$$

Исходя из основного логарифмического тождества, получаем:

$$x = \frac{40}{9}$$

Пример 11

Дано:

$\log_2 5 = a$, $\log_2 3 = b$, a и b считать известными числами.

Найти: $\log_2 300$.

Таким образом, задача заключается в том, чтобы выразить искомый логарифм через a и b.

Согласно основной теореме арифметики, разложим составное число 300 на простые множители:

$$300 = 2 * 150 = 2 * (2 * 75) = 2 * (2 * (5 * 15)) =$$

$$= 2 * \left(2 * (5 * (5 * 3))\right) = 2 * 2 * 5 * 5 * 3 = 2^2 * 5^2 * 3$$

Имеем:

$$\log_2(2^2 * 5^2 * 3)$$

Согласно свойству логарифма, логарифм произведения представим как сумму логарифмов:

$$\log_2(2^2 * 5^2 * 3) = \log_2 2^2 + \log_2 5^2 + \log_2 3$$

Вынесем показатели степени как сомножители:

$$\log_2 2^2 + \log_2 5^2 + \log_2 3 = 2\log_2 2 + 2\log_2 5 + \log_2 3 = 2 + 2\log_2 5 + \log_2 3$$

Подставим заданные значения:

$$2 + 2\log_2 5 + \log_2 3 = 2 + 2a + b$$

Итак, мы рассмотрели новое свойство логарифма, вывели формулу для логарифма степени. Мы рассмотрели применение свойств логарифма в некоторых типовых задачах. Далее мы продолжим изучать свойства логарифмов и решать различные задачи, применяя изученные факты.

Дополнительные рекомендованные ссылки на ресурсы сети Интернет

https://www.youtube.com/watch?v=-T2kfR6qFYE
https://www.youtube.com/watch?v=v90m1sH3pPc
https://www.youtube.com/watch?v=0ezszK4K3rY
https://www.youtube.com/watch?v=JoUR1ePwNo0

Домашнее задание

1. Ш.А.Алимов, Ю.М.Колягин, М.В. Ткачева, Н.Е.Федорова «АЛГЕБРА И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА» 10-11 класс, Москва «Просвещение», 2016, проработать §15-17

2. Вычислить:

а) $\log_{\sqrt{7}} 49$; б) $\log_{\sqrt{2}}(2\sqrt{8})$; в) $\log_{\frac{1}{15}}(225\sqrt[5]{15})$; г) $\log_{\frac{1}{2}}(\frac{64}{729})$

3. Вычислить:

а) $2^{3+\log_2 9}$; б) $7^{1+\log_7 4}$; в) $(\frac{1}{6})^{2\log_{\frac{1}{6}} 20}$; г) $(\sqrt{7})^{4+\log_{\sqrt{7}} 0,5}$

4. Вычислить:

а) $\log_{144} 3 + \log_{144} 4$; б) $\log_{\frac{1}{8}} 4 + \log_{\frac{1}{8}} 2$; в) $\log_{216} 2 + \log_{216} 3$; г) $\log_{\frac{1}{12}} 4 + \log_{\frac{1}{12}} 36$;

5. Вычислить:

а) $\log_{\sqrt{3}} 6 - \log_{\sqrt{3}} 2\sqrt{3}$; б) $\log_{\frac{2}{3}} 32 - \log_{\frac{2}{3}} 243$;

в) $\log_{\sqrt{2}} 7\sqrt{2} - \log_{\sqrt{2}} 14$; г) $\log_{0,1} 0{,}003 - \log_{0,1} 0{,}03$.

6. Вычислить:

а) $\log_{\frac{1}{2}} 16 * \log_5 \frac{\sqrt[3]{5}}{25} : 3^{\log_3 2}$; б) $\log_3 27 : \log_{\frac{1}{2}} 4 * \log_7 \sqrt[3]{49}$;

в) $\log_{\frac{1}{3}} 9 * \log_2 \frac{\sqrt[3]{2}}{8} : 7^{2\log_7 2}$; г) $\log_6 \frac{1}{6\sqrt{216}} * \log_{0,3} \frac{1}{0{,}09} * \lg 10\sqrt{0.1}$

7. Выразить через $c = \log_{\frac{1}{2}} 7$ и $a = \log_{\frac{1}{2}} 3$:

а) $\log_{\frac{1}{2}} 21$; б) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{42}$; в) $\log_{\frac{1}{2}} 147$; г) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{49}{\sqrt{3}}$