ПЕРВООБРАЗНАЯ И ЕЕ СВОЙСТВА

Определение: **Функция $F(x)$ называется *первообразной для функции* $f(x)$ на заданном промежутке, если для любого *x* из этого промежутка $F'(x) = f(x)$.**

Пример: Для функции $f(x) = x^3$ на интервале $(-\infty;+\infty)$ первообразной является функция $F(x) = \frac{x^4}{4}$, поскольку $F'(x) = \left(\frac{x^4}{4}\right)' = \frac{1}{4} \cdot 4x^3 = x^3$, но первообразными будут и функции $F(x) = \frac{x^4}{4} + 5$, $F(x) = \frac{x^4}{4} - 2{,}75$, $F(x) = \frac{x^4}{4} + C$, где C – постоянная величина.

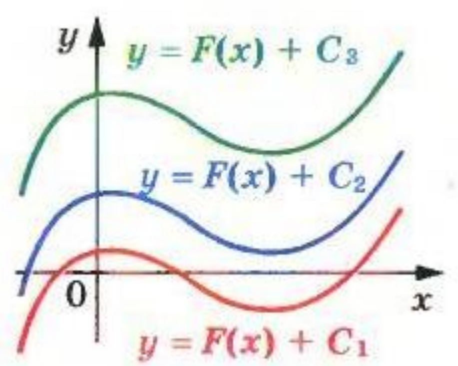
Основное свойство первообразной

Если функция $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$ на данном промежутке, а *C* — произвольной постоянной, то функция $F(x) + C$ также является первообразной для функции $f(x)$, при этом любая первообразная для функции $f(x)$ на данном промежутке может быть записана в виде $F(x) + C$, где *C* — произвольная постоянная.

Пример: Поскольку функция $F(x) = \frac{x^4}{4}$ является первообразной для функции $f(x) = x^3$ на интервале $(-\infty;+\infty)$, то *общий вид всех первообразных для функции* $f(x) = x^3$ можно записать следующим образом: $F(x) = \frac{x^4}{4} + C$, где C – произвольная постоянная величина.

Геометрический смысл множества первообразных

Графики любых первообразных для данной функции получаются один из другого параллельным переносом вдоль оси Оу.



Нахождение первообразной называется *операцией интегрирования*.

Используя таблицу производных, можно составить таблицу первообразных. Чтобы обосновать эту таблицу, нужно продифференцировать функции, стоящие в правом столбце. (Выполните это)

Функция	Первообразная
k	$kx+C$
$x^n \ (n \neq -1)$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}+C$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + C$
$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}+C$
e^x	e^x+C
$\sin x$	$-\cos x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$
$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$tg\ x + C$
$\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$-ctg\ x + C$
a^x	$\dfrac{a^x}{\ln a}+C$

<u>Неопределенный интеграл</u>

<u>Определение</u>: **Совокупность всех первообразных для данной функции $f(x)$ называется *неопределенным интегралом* и обозначается символом $\int f(x)\,dx$, то есть $\int f(x)\,dx = F(x)+C$, где $F(x)$ — одна из первообразных для функции $f(x)$, а С — произвольная постоянная.**

Пример: $\int x^3 dx = \dfrac{x^4}{4}+C$, поскольку для функции $f(x)=x^3$ на интервале $(-\infty;+\infty)$ все первообразные можно записать следующим образом: $F(x)=\dfrac{x^4}{4}+C$.

<u>Правила нахождения первообразных (правила интегрирования)</u>

1. Если *F* — первообразная для *f*, а *G* — первообразная для *g*, то *F* + *G* — первообразная для *f* + *g*. *Первообразная для суммы равна сумме*	**1.** $\int (f(x)+g(x))\,dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$ *Интеграл от суммы равен сумме интегралов от слагаемых.*

первообразных для слагаемых.	
2. Если *F* — первообразная для *f* и *c* — постоянная, то *cF* — первообразная для функции *cf*.	**2.** $\int c\cdot f(x)\,dx = c\cdot\int f(x)\,dx$ где *c* — постоянная. *Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла.*
3. Если *F* — *первообразная для f, а k* и *b* — постоянные (причем *k* ≠ 0), то $\frac{1}{k}F(kx+b)$ **— первообразная для функции** $f(kx+b)$	**3.** $\int f(kx+b)\,dx = \frac{1}{k}F(kx+b)+C$

ТАБЛИЦА ИНТЕГРАЛОВ (*выучить*)

1. $\int 0dx = C$;
2. $\int dx = x + C$;
3. $\int x^{\alpha}dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}+C, \quad \alpha \neq -1$;
4. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}+C$;
5. $\int \sqrt[n]{x}dx = \frac{n}{n+1}\sqrt[n]{x^{n-1}}+C$
6. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$;
7. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}+C$;
8. $\int e^x dx = e^x + C$;
9. $\int \sin xdx = -\cos x + C$;
10. $\int \cos xdx = \sin x + C$;
11. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$;
12. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$;
13. $\int tgxdx = -\ln|\cos x| + C$;
14. $\int ctgxdx = \ln|\sin x| + C$.

<u>Примеры решения задач</u>

Задача 1 Проверьте, что функция $F(x) = 2\sqrt{x}$ является первообразной для функции $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ на промежутке $(0;+\infty)$.

Р е ш е н и е

$F'(x) = (2\sqrt{x})' = 2\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$, а это и означает, что $F(x)$ является первообразной для функции $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

Задача 2 1) Найдите одну из первообразных для функции $f(x) = x^4$ на $\boldsymbol{R}$.

2) Найдите все первообразные для функции $f(x) = x^4$.

3*) Найдите $\int x^4 dx$.

Решение

1) Одной из первообразных для функции $f(x) = x^4$ на множестве $\boldsymbol{R}$ будет функция $F(x) = \frac{x^5}{5}$, поскольку $F'(x) = (\frac{x^5}{5})' = \frac{1}{5} \cdot 5x^4 = x^4$.

2) По основному свойству первообразных все первообразные для функции $f(x) = x^4$ можно записать в виде $\frac{x^5}{5} + C$, где C — произвольная постоянная.

3*) Найдите $\int x^4 dx = \frac{x^5}{5} + C$, где C — произвольная постоянная.

$\int f(x)\, dx$ — это просто специальное обозначение общего вида всех первообразных для данной функции $f(x)$ (которые мы уже нашли в пункте 2 решения).

Задача 3 Для функции $f(x) = \sqrt{x}$ найдите первообразную, график которой проходит через точку $M\ (9; 10)$.

Решение

$D(f) = [0; +\infty)$. Тогда $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$.

Общий вид всех первообразных для функции $f(x)$ следующий:

$$F(x) = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}} + C = \frac{2}{3}x\sqrt{x} + C.$$

По условию график первообразной проходит через точку $M\ (9; 10)$. Следовательно, при $x = 9$ получаем $\frac{2}{3} \cdot 9\sqrt{9} + C = 10$.

Отсюда $C = -8$. Тогда искомая первообразная: $F(x) = \frac{2}{3}x\sqrt{x} - 8$.

Ответ: $F(x) = \frac{2}{3}x\sqrt{x} - 8$.

Задача 4* Найдите общий вид первообразных для функции

$$f(x) = \frac{1}{\sin^2 2x} + \frac{1}{\sqrt{2-x}} - 2\cos 3x.$$

Решение

Используем правила нахождения первообразных. Сначала обратим внимание на то, что заданная функция является алгебраической суммой трех слагаемых. Следовательно, ее первообразная равна соответствующей алгебраической сумме первообразных для слагаемых (правило 1). Затем учтем, что все функции-слагаемые являются сложными функциями от аргументов вида $kx+b$. Следовательно, по правилу 3 мы должны перед каждой функцией-первообразной (аргумента $kx+b$), которую мы получим по таблице первообразных, поставить множитель $\frac{1}{k}$.

Для каждого из слагаемых удобно сначала записать одну из первообразных (без постоянного слагаемого *C*), а затем уже записать общий вид первообразных для заданной функции (прибавить к полученной функции постоянное слагаемое *C*).
Запишем одну из первообразных для каждого слагаемого.

Для функции $\frac{1}{\sin^2 2x}$ первообразной является функция $-\frac{1}{2}ctg\ 2x$.

Второе слагаемое запишем так: $\frac{1}{\sqrt{2-x}}=(2-x)^{-\frac{1}{2}}$. Тогда первообразной для этой функции будет функция: $\frac{1}{-1}\cdot\frac{(2-x)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}=-2(2-x)^{\frac{1}{2}}=-2\sqrt{2-x}$.

Первообразной для функции $2\cos 3x$ будет функция $2\cdot\frac{1}{3}\sin 3x=\frac{2}{3}\sin 3x$.

Тогда общий вид первообразных для заданной функции будет:

$$F(f)=-\frac{1}{2}ctg\ 2x-2\sqrt{2-x}-\frac{2}{3}\sin 3x+C.$$

Задача 5 ***а)*** Найдите интеграл $\int\left(\frac{1}{x\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)dx$.

Решение

$$\int\left(\frac{1}{x\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)dx=\int\left(\frac{1}{x\cdot x^{\frac{1}{2}}}+\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}\right)dx=\int\left(x^{-1\frac{1}{2}}+x^{-\frac{2}{3}}\right)dx=\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}}+\frac{x^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}}+C=-\frac{2}{\sqrt{x}}+3\sqrt[3]{x}+C.$$

б) Найдите интеграл $\int\frac{x^3+1}{x+1}dx$.

Решение

$$\int\frac{x^3+1}{x+1}dx=\int\frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x+1}dx=\int(x^2-x+1)dx=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x+C.$$

в) Найдите интеграл $\int\frac{9^x-3^x-12}{3+3^x}dx$.

Решение

$$\int\frac{9^x-3^x-12}{3+3^x}dx=\int\frac{(3+3^x)(3^x-4)}{3+3^x}dx=\int(3^x-4)dx=\frac{3^x}{\ln 3}-4x+C.$$

г) Найдите интеграл $\int\frac{10^{x-1}-8^x}{2^x}dx$.

Решение

$$\int\frac{10^{x-1}-8^x}{2^x}dx=\int\frac{10^x\cdot 10^{-1}-8^x}{2^x}dx=\int\left(\frac{5^x}{10}-4^x\right)dx=\frac{5^x}{10\ln 5}-\frac{4^x}{\ln 4}+C.$$

После прочтения материала:

1) *проверьте выполнение домашней работы (самостоятельно);*
2) *если появились вопросы, смотрите ответы и рекомендации в разделе «Ответы»;*
3) *если это не помогло, задавайте вопросы по адресу svetlana.grigorievna.tsapova@gmail.com*

Ответы

№ 908 ***а)*** $F(x)=\frac{5^x}{\ln 5}+6$; ***б)*** $F(x)=\frac{10^x}{\ln 10}-3$; ***в)*** $F(x)=\lg|x|-0{,}26$; ***г)*** $F(x)=\pi x+10000$

(вместо чисел 6; -3; -0,26; 10000 могут стоять другие числа или ноль).

№ 912 ***Доказательство.*** $F'(x)=(0{,}5x^2+x)'=2\cdot 0{,}5x+1=x+1$. *Имеем* $F'(x)=f(x)$.
Итак, по определению, функция $F(x)$ *- первообразная для функции* $f(x)$.

№ 917, №921 *Доказываются аналогично № 912; (напоминание:* $\sin 3x$; $tg\,3x$ *- сложные функции).*

№ 922 ***а)*** $-\frac{2}{13x^{6,5}}+C$; ***б)*** $\frac{5x^{7,4}}{37}+C$; ***в)*** $\int x\sqrt[5]{x^4}\,dx=\int x^{\frac{9}{5}}dx=\frac{5x^{\frac{14}{5}}}{14}+C=\frac{5x^{2,8}}{14}+C$;

г) $\frac{x^{\alpha+5}}{\alpha+5}+C$.

№ 923 ***а)*** $\frac{3x^{\frac{5}{3}}}{5}+C$; ***б)*** $\int\left(\frac{\sqrt[3]{x}}{x}\right)^2dx=\int x^{\left(\frac{1}{3}-1\right)\cdot 2}dx=\frac{x^{-\frac{4}{3}+1}}{-\frac{4}{3}+1}+C=\frac{x^{-\frac{1}{3}}}{-\frac{1}{3}}+C=-\frac{3}{x^{\frac{1}{3}}}+C=-\frac{3}{\sqrt[3]{x}}+C$;

в) $\frac{2x^{4,5}}{9}+C$; ***г)*** $\frac{x^{4-\alpha}}{4-\alpha}+C$.

№ 932 ***а)*** $F(x)=-2\cos x+C$; ***б)*** $F(x)=-\frac{1}{3}\cos 3x+C$; ***в)*** $F(x)=\frac{1}{7}\sin 7x+C$;

г) $F(x)=5x+\sin x+C$.

№ 935 ***а)*** $F(x)=-x^5+\frac{5^x}{\ln 5}+C$; ***б)*** $F(x)=-x^2-\cos x+C$; ***в)*** $F(x)=\frac{x^4}{4}+e^x+C$;

г) $F(x)=\frac{x^6}{6}-2\sin x+C$.

№ 941 *В учебнике на стр 229 очень подробно разобрана подобная задача.*
а) $S(t)=t^3+4$; ***б)*** $S(x)=-2\cos t$.

№ 943 ***а)*** $F(x)=\frac{3\cdot 2^x}{\ln 2}+3x+C$; ***б)*** $F(x)=-\frac{3^{-5x}}{5\ln 3}+\frac{2x^{1,5}}{3}x+C$; ***в)*** $F(x)=\frac{1}{3}e^{3x}+\frac{3\cdot x^{e+1}}{e+1}+C$.

№ 949 ***Во всех заданиях необходимо преобразовать формулу, задающую функцию и, учитывая координаты точки А, найти С.***

	а)	***б)***	***в)***	***г)***
преобразованная функция	$y=3x^2+5x-2$	$y=x^3-1$	$y=1+\frac{2}{x-1}$	$y=\frac{5}{2\cos^2 2x}$
$F(x)$	$F(x)=\frac{3x^3}{3}+\frac{5x^2}{2}-2x+C$	$F(x)=\frac{x^4}{4}-x+C$	$F(x)=x+2\ln\lvert x-1\rvert+C$	$F(x)=\frac{5}{4}tg2x+C$
C	*4*	*5*	*3*	$-\frac{5\sqrt{3}}{4}$
Ответ	$F(x)=x^3+2{,}5x^2-2x+4$	$F(x)=\frac{x^4}{4}-x+5$	$F(x)=x+2\ln\lvert x-1\rvert+3$	$F(x)=\frac{5}{4}tg2x-\frac{5\sqrt{3}}{4}$

№ 951 ***а), б), г), е)*** *смотрите* **Задача 5;** ***в)*** $-ctg2x+C$; ***д)*** $2x-tg\,x+C$.

Домашнее задание: учебник "Алгебра,11"(Бевз); теория §24,25.

Решить: №№ 936, 938, 939, 940, 942, 944, 945, 947, 948, 950, 952.